ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας Τχ $(E, \mathcal{T})$ θα λέγεται ομαλός (regular) αν.ν. $(\forall a \in E)(\forall K \subseteq E)$ K κλειστό $\overset{a \notin K}{\vee}$ $(\exists A, B \in \mathcal{T})$: $a \in A \wedge K \subseteq B$ και $A \cap B = \emptyset$

ΟΡΙΣΜΟΣ: $(E, \mathcal{T})$ T_3-χώρος $\Leftrightarrow$ $(E, \mathcal{T})$ είναι T_1 και ομαλός

$T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$

ΟΡΙΣΜΟΣ: $(E, \mathcal{T})$ θα λέγεται κανονικός (Normal) αν.ν. $(\forall F_1, F_2 \subseteq E)$ με $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, υπάρχουν $A, B \in \mathcal{T}$, $F_1 \subseteq A$, $F_2 \subseteq B$, $A \cap B = \emptyset$

ΟΡΙΣΜΟΣ $(E, \mathcal{T})$ T_4-χώρος $\Leftrightarrow$ $(E, \mathcal{T})$ είναι T_1 και κανονικός

Παρατήρηση: Υπάρχουν χώροι όπου είναι ομαλοί ή κανονικοί αλλά δεν είναι T_1-χώροι

$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$

(Τα παραδείγματα από το βιβλίο)

ΠΡΟΤΑΣΗ $(E, \mathcal{T})$ κανονικός $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall F, H \text{ με } F \subseteq H \text{ με } F \text{ κλειστό \& } H \\ \text{ανοιχτό}, \exists G \in \mathcal{T} : F \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq H \end{cases}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

($\Rightarrow$): Έστω $(E, \mathcal{T})$ κανονικός, F κλειστό, H ανοιχτό $F \subseteq H$

Τότε H^c κλειστό και $H^c \cap F \subseteq H^c \cap H = \emptyset \Rightarrow H^c \cap F = \emptyset$

Όμως $(E, \mathcal{T})$ κανονικός τότε $(\exists A, B \in \mathcal{T})$ $A \cap B = \emptyset$ τω

$H^c \subseteq A$ και $F \subseteq B$

$A \cap B = \phi \Rightarrow A \subseteq B^c \Rightarrow A = A^o \subseteq (B^c)^o = (\overline{B})^c \Rightarrow \overline{B} \subseteq A^c \subseteq H$

Τελικά, $F \subseteq B \subseteq \overline{B} \subseteq H$.

($\Leftarrow$): Έστω ισχύει το προηγούμενο συμπέρασμα (υπόθεση)

Ας είναι $F_1, F_2 \subseteq E$ κλειστά και $F_1 \cap F_2 = \phi$. Τότε,

$F_1 \subseteq F_2^c \in \mathcal{T}$. Άρα εξ υποθέσεως $\exists G \in \mathcal{T}$: $F_1 \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq F_2^c$

Θέτουμε $A = G$ και $B = \overline{G}^c$

Άρα, έχουμε ότι $F_1 \subseteq A$ και $F_2 \subseteq B$ και τέλος

$A \cap B = G \cap \overline{G}^c \subseteq \overline{G} \cap \overline{G}^c = \phi \Rightarrow A \cap B = \phi$

Άρα, $(E, \mathcal{T})$ κανονικός χώρος

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω τχ $(E_1, \mathcal{T}_1)$ και $(E_2, \mathcal{T}_2)$. Θεωρούμε συνάρτηση $f_{1-1}: (E_1, \mathcal{T}_1) \xrightarrow{\text{επι}} (E_2, \mathcal{T}_2)$. Τότε

α) $(E_1, \mathcal{T}_1)$ είναι T_1 (αντιστ. T_2), f ανοιχτή $\Rightarrow (E_2, \mathcal{T}_2)$ T_1 (αντιστ. T_2) χώρος

β) $(E_1, \mathcal{T}_1)$ είναι T_3 (αντιστ. T_4), f ομοιομορφ. $\Rightarrow (E_2, \mathcal{T}_2)$ T_3 (αντιστ. T_4) χώρος

(όλες δηλαδή οι (T_0), T_1, T_2, T_3, T_4 είναι τοπολογικές ιδιότητες)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α) Έστω $(E_1, \mathcal{T}_1)$ είναι T_1 και f ανοιχτή

Έστω τυχόν $y \in E_2 \xRightarrow{f \text{ επι}} \exists x \in E_1 : f(x) = y$

Παίρνω $\{y\}^c = \{f(x)\}^c \overset{f \, 1-1}{=\!=} f(\{x\}^c)$.

Επειδή f ανοιχτή και $(E_1, \mathcal{T}_1) \in T_1$ τότε

$f(\{x\}^c) = \{y\}^c$ ανοιχτό. Άρα, $\{y\}$ κλειστό $\Rightarrow (E_2, \mathcal{T}_2) \in T_1$

Για το T_2:

Έστω $(E_1, \mathcal{T}_1)$ είναι T_2 και f ανοιχτή

και ας είναι $c \neq d$ με $c, d \in E_2$. Τότε όπως

f επι, $\exists a, b \in E_1$: $f(a) = c$ και $f(b) = d$ και $a \neq b$

διότι f συνάρτηση.

$(E_1, \mathcal{T}_1) \in T_2 \Rightarrow (\exists A, B \in \mathcal{T}_1)$ $a \in A$, $b \in B$, $A \cap B = \phi$

Τότε $f(A)$, $f(B)$ εν $\mathcal{T}_2$ όπως f ανοιχτή

$f(A) \cap f(B) \overset{1-1}{=\!=} f(A \cap B) = f(\phi) = \phi$

β) Έστω $(E_1, \mathcal{T}_1) \in T_3 \Rightarrow (E_1, \mathcal{T}_1) \in T_1$ και ομαλός τότε

ισχύει $(E_2, \mathcal{T}_2) \in T_1$. Θδο $(E_2, \mathcal{T}_2)$ ομαλός.

Έστω $p \in E_2$ και $K \subseteq E_2$, K κλειστό, $p \notin K$. Όπως επί

$\exists q \in E_1$: $f(q) = p$ και $f^{-1}(K)$ κλειστό εν E_1 όπως f συνεχής

$$\left.\begin{array}{l} f(q)=p \\ p\notin K \end{array}\right| \Rightarrow q\in f^{-1}(K)$$

Τότε και όπως Ε ομαλός θα $\left\{ \begin{array}{l} (\exists A,B \text{ εν } \mathcal{T}_1)\ x\in A \text{ και } f^{-1}(K)\subseteq B \\ \text{και } A\cap B=\emptyset \end{array}\right.$

Θέτουμε $f(A)=G$ και $f(B)=H$

Άρα, όπως f ομοιομορφισμός G,H ανοιχτά

Επίσης, $p\in f(A)=G$, $H=f(B)\supseteq f(f^{-1}(K))\overset{\text{επί}}{\underset{1-1}{=}}K$

Μένει νδο $f(A)\cap f(B)=\emptyset$

$f(A)\cap f(B)\overset{1-1}{=}f(A\cap B)=f(\emptyset)=\emptyset$

Σαν άσκηση να γίνει ο χώρος T_4.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Οι T_1, T_2, T_3 είναι κληρονομικές ιδιότητες

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$(E,\mathcal{T})$ είναι T_1 και $A\subseteq E$, $x,y\in A$ με $x\neq y$

Τότε υπάρχουν $(G,H \text{ εν } \mathcal{T})$ $x\in G$, $y\notin G$ και $y\in H$ και $x\notin H$

Αν θεωρήσουμε τα σύνολα $G\cap A$ και $H\cap A$ ανοιχτά εν $\mathcal{T}_A$

Άρα, $(A,\mathcal{T}_A)\in T_1$

Για τον T_2: όμοια

Για τον T_3: αρκεί νδο $(E,\mathcal{T})$ ομαλός και $A\subseteq E$

Έστω $x\in A$ και $K\subseteq A$, K κλειστό με $x\notin K$

K κλειστό εν $A \Leftrightarrow (\exists F \text{ κλ. εν } E): K=A\cap F \xRightarrow[x\in A]{x\notin K} x\notin F$

F κλειστό εν E με $x\notin F \xRightarrow{\text{ομαλός}} (\exists G,H \text{ εν } \mathcal{T}) \left\{ \begin{array}{l} x\in G \text{ και } F\subseteq H \\ \text{και } G\cap H=\emptyset \end{array}\right.$

Θεωρούμε τα $A\cap G$ και $A\cap H \Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow x\in A\cap G$ και $K\subseteq A\cap H$, $(A\cap H)\cap(G\cap H)=A\cap(\underbrace{G\cap H}_{\emptyset})=\emptyset$